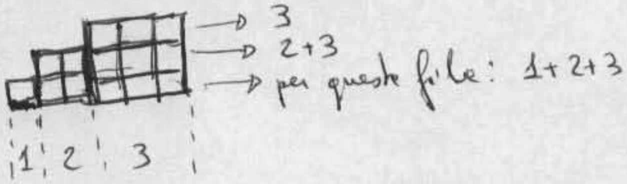
Vogliamo ricavare la formula matematica per calcolare la seguente somma:

$$1^2+2^2+3^2+\dots+N^2$$

Dal punto di vista grafico, significa calcolare quanti quadratini ci sono nella seguente figura:




Quindi possiamo dire, in modo simbolico, che:

$$1+2^2+3^2+\dots+N^2 = \begin{array}{r} 1+2+3+\dots+N \\ 2+3+4+\dots+N \\ 3+4+\dots+N \\ \ddots \\ N \end{array}$$

In formula sarà:

$$\sum_1^N j^2 = \sum_1^N k + \sum_2^N k + \sum_3^N k + \dots + \sum_N^N k = \sum_1^N \sum_j^N k$$

Dalla lezione sulla somma dei numeri consecutivi sappiamo che:

# Somme di quadrati consecutivi ([illegible])

$$\sum_{j}^{N} k = \frac{N+j}{2}\left(N-j+1\right)$$

Quindi:

$$\sum_{1}^{N} j^2 = \sum_{1}^{N} \frac{N+j}{2}\left(N-j+1\right) = \sum_{1}^{N}\left[\frac{N^2}{2} - \frac{j^2}{2} + \frac{N+j}{2}\right]$$

questo termine lo portiamo dell'altro lato!

$$\Downarrow$$

$$\sum_{1}^{N} j^2 + \sum_{1}^{N} \frac{j^2}{2} = \sum_{1}^{N} \frac{N^2}{2} + \sum_{1}^{N} \frac{N}{2} + \sum_{1}^{N} \frac{j}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{3}{2}\sum_{1}^{N} j^2 = \frac{N\left(N^2+N\right)}{2} + \frac{N\left(N+1\right)}{4} = \frac{N^3}{2} + \frac{N^2}{2} + \frac{N^2}{4} + \frac{N}{4}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{1}^{N} j^2 = \frac{N^3}{3} + \frac{N^2}{3} + \frac{N^2}{6} + \frac{N}{6} = \frac{N^3}{3} + \frac{N^2}{2} + \frac{N}{6}$$