Somma di numeri consecutivi (Gaetano Castellano) $\boxed{1/2}$

Supponiamo di voler trovare la formula matematica che mi da il risultato della seguente somma:

$$1+2+3+4+\dots+N$$

Partiamo da queste osservazioni:

$$1+2+3+4 = (1+4)+(2+3) = 5+5 = 2\cdot 5 = 2\cdot(4+1)$$

$$1+2+3+4+5+6 = (1+6)+(2+5)+(3+4) = 3\cdot(6+1)$$

Dagli esempi si intuisce che la formula, nel caso di N pari, debba essere:

$$1+2+\dots+N = \frac{N}{2}(N+1)$$

Supponiamo valida la formula per N e vediamo se è vera per N+2 { ~~principio dell'induzione~~, stiamo considerando il solo caso pari }

$$\underbrace{1+2+\dots+N}+(N+1)+(N+2) = \frac{N}{2}(N+1)+(N+1)+(N+2) =$$

$$= \frac{N^2+N}{2}+2N+3 = \frac{N^2+N+4N+6}{2} = \frac{N^2+3N}{2}+N+3 =$$

$$= \frac{N(N+3)}{2}+(N+3) = (N+3)\left(\frac{N}{2}+1\right) = \underline{(N+3)\frac{(N+2)}{2}}$$

$$\frac{N+2}{2}\left[(N+2)+1\right]$$

Vera per $N \Rightarrow$ Vera per $(N+2)$, per il principio di induzione: è vera per ogni N pari

Vediamo ora il caso ~~N~~ dispari.

$$\underbrace{1+2+3+\dots+N}+(N+1) \qquad \text{dove } N \text{ è sempre pari}$$

$$\frac{N}{2}(N+1)+N+1=\frac{(N+1)}{2}\left[N+2\right]=$$

$$=\frac{N+1}{2}\left[(N+1)+1\right]$$

ed anche in questo caso la formula è dimostrata -

Fino ad ora abbiamo considerato somme di numeri consecutivi che partono da 1.

Vediamo un caso più generale:

$$k+(k+1)+\dots+N \qquad \text{con } N \geq K$$

Possiamo anche scriverla:

$$\sum_{K}^{N} j$$

Ovviamente sarà:

$$\sum_{K}^{N} j=\sum_{1}^{N} j-\sum_{1}^{K-1} j=\frac{N(N+1)}{2}-\frac{(K-1)K}{2}=$$

$$=\frac{N^2-K^2+N+K}{2}=\frac{(N-K)(N+K)+(N+K)}{2}=\frac{N+K}{2}\left[N-K+1\right]$$